Jean Sousselier 08/06/2025

Imparité et conjecture de Syracuse

1. Enoncé de la conjecture (Wikipedia)

En mathématiques, on appelle **suite de Syracuse** une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2… C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 14.

Après que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2…) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

La **conjecture de Syracuse**, encore appelée **conjecture de Collatz**, **conjecture d'Ulam**, **conjecture tchèque** ou **problème 3*x* + 1**, est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse : les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes[1].

2. Notion d'ordre d'imparité.

Définissons la parité d'ordre n des nombres pairs ainsi :

x est pair d'ordre n si $x=\mathbf{2^n(2p-1)}$

Tout nombre pair s'écrit donc : $\mathbf{P(n,p) = 2^n(2p-1)}$ avec n et p entiers >0

Définissons de même l'imparité d'ordre n des nombres impairs.

Tout nombre impair s'écrit y = x-1, x étant un nombre pair, donc

$\mathbf{I(n,p) = 2^n(2p-1) \ -1}$ avec n et p entiers >0

Remarques :

si y est pair d'ordre n, **2y** est pair d'ordre (n+1)

si y est impair d'ordre n, **2y+1** est impair d'ordre (n+1)

En effet, $2y+1 = 2^{n+1}(2p-1) -2 +1 = 2^{n+1}(2p-1) -1$

On définit ainsi une suite croissante infinie de nombres d'ordre d'imparité augmenté de 1 à chaque pas.

3. Application à une suite de Syracuse .

3.1 Suites croissantes.

Considérons la suite de Syracuse **compressée** partant d'un nombre impair A_1 d'ordre n :

$\mathbf{A_1 = 2^n(2p-1) -1}$

Le nombre suivant $A_2 = (3A_1 + 1)/2$

$A_2 =[3 .2^n(2p-1) -2] /2$
$A_2 = 3 .2^{n-1}(2p-1) - 1 = 2^{n-1} .3(2p-1) - 1$
qui est un nombre impair d'ordre n-1.

Donc la suite de Syracuse partant de **I(n,p)** comprend n+1 nombres strictement croissants, le dernier étant un nombre pair

$A_3 = 2^{n-2} .3^2(2p-1) - 1$
……

$\mathbf{A_n = 2.3^{n-1}(2p-1) - 1}$

$\mathbf{A_{n+1} = 3^n(2p-1) - 1}$ qui est un nombre pair,

3.2 Suites décroissantes.

Considérons la suite de Syracuse compressée partant d'un nombre pair A1 d'ordre n :

$\mathbf{A_1 = 2^n(2p-1)}$

$A_2 =2^{n-1}(2p-1)$
………

$\mathbf{A_n = 2(2p-1)}$

$\mathbf{A_{n+1} = (2p-1)}$

Donc la suite de Syracuse partant de **P(n,p)** comprend n+1 nombres strictement décroissants, le denier étant impair

$A_1, A_2, \dots A_n, A_{n+1}$

3.3 Résumé.

La suite compressée de Syracuse partant d'un nombre impair $\mathbf{A_1 = 2^n(2p-1) - 1}$ comprend n+1 (et seulement n+1) nombres croissants, le dernier étant $\mathbf{A_{n+1} = 3^n(2p-1) - 1}$

La suite compressée de Syracuse partant d'un nombre pair $\mathbf{A_1 = 2^n(2p-1)}$ comprend n+1 (et seulement n+1) nombres décroissants, le dernier étant $\mathbf{A_{n+1} = (2p-1)}$

Remarques :

Pour une suite compressée partant d'un nombre impair, on a :

$A_1 = 2^n(2p-1) - 1$ donc $A_1 + 1 = 2^n(2p-1)$

$A_{n+1} = 3^n(2p-1) - 1$ donc $A_{n+1} + 1 = 3^n(2p-1)$

$(A_1 + 1) / 2^n = (A_{n+1} + 1) / 3^n$

$\mathbf{A_{n+1} = 3^n / 2^n (A_1 + 1) - 1}$

Pour une suite compressée partant d'un nombre pair, on a :

$A_1 = 2^n(2p-1)$

$A_{n+1} = (2p-1)$

$\mathbf{A_{n+1} = A_1 / 2^n}$